SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ CẦN THƠ **ĐỀ CHÍNH THỨC**	KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ - NĂM HỌC 2012-2013 KHÓA NGÀY: 16/10/2012 MÔN THI: TOÁN *Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề*

HƯỚNG DẪN CHẤM

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
1(4đ)	Xét đa thức $f(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ có các nghiệm là x, y, z. Từ phương trình $x + y + z = 0$, ta suy ra $a = 0$. Do đó $f(t) = t^3 + bt + c$	**1.0đ**
	Mặt khác $x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}+b\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)-16\left(x^n+y^n+z^n\right)=0 \quad (4)$ Và đặt $S_n = x^n + y^n + z^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó (4) trở thành $S_{n+3} + bS_{n+1} - 16S_n = 0$	**1.0đ**
	Ta có $S_7 = -bS_5 + 16S_4 = -b\left(-bS_3 + 16S_2\right) + 16\left(-bS_2 + 16S_1\right) = b^2S_3 - 32bS_2 + 256S_1 \quad (5)$ Thế $S_7 = 16128$, $S_3 = 48$, $S_2 = -2b$, $S_1 = 0$ vào (5), ta được $b = \pm 12$ $+b = 12$, ta được $f(t) = t^3 + 12t - 16$ có nghiệm duy nhất (không thỏa) $+b = -12$, ta được $f(t) = t^3 - 12t - 16$ có ba nghiệm $t = -2$; $t = 2$; $t = 4$ Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là $(-2; 2; 4)$ và các hoán vị của nó.	**1.0đ**
2(4đ)	a) Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}$; $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$ $u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ $\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1 \\ c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = 2 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) = 2\sqrt{3}$ $D_{c_1} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 2^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_2^2 - 2\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ $D_{c_2} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 - \lambda_1^2 = -3 + 2\sqrt{3}$ $c_1 = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}$; $c_2 = \dfrac{-3 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}$ Vậy $u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}\lambda_1^n + \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}\lambda_2^n,\ n \geq 1$	**1đ**
	Ta có $\lambda_1.\lambda_2 = 1$. Vậy: $\begin{aligned} u_n &= \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})\lambda_1^{n-1} + \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}(2 + \sqrt{3})\lambda_2^{n-1} \\ &= \dfrac{1}{2}\left(\lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1}\right),\ n \geq 1 \end{aligned}$ Từ đó:	**1đ**

Tiếp

<table>
<tr><th>CÂU</th><th>NỘI DUNG</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\begin{aligned}
u_n^2+u_{n-1}^2 &= \frac{1}{4}\left[\lambda_1^{2(n-1)}+\lambda_2^{2(n-1)}+\lambda_1^{2(n-2)}+\lambda_2^{2(n-2)}+4\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[\lambda_1^{2n-4}\left(\lambda_1^2+1\right)+\lambda_2^{2n-4}\left(\lambda_2^2+1\right)+4\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[4\lambda_1^{2n-3}+4\lambda_2^{2n-3}+4\right]=\lambda_1^{2n-3}+\lambda_2^{2n-3}+1\\
4u_nu_{n-1} &= 4\left(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1}\right)\left(\lambda_1^{n-2}+\lambda_2^{n-2}\right)\\
&= \lambda_1^{2n-3}+\lambda_2^{2n-3}+\left(\lambda_1\lambda_2\right)^{n-2}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\\
&= \lambda_1^{2n-3}+\lambda_2^{2n-3}+4
\end{aligned}$$

Vậy $u_n^2+u_{n-1}^2-4u_nu_{n-1}=-3$

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

b) Chứng minh $\dfrac{u_n^2-1}{3}$ là số chính phương.

Từ câu a) ta có $4u_n^2+u_{n-1}^2-4u_nu_{n-1}=3u_n^2-3$

$\Longrightarrow \left(2u_n-u_{n-1}\right)^2=3u_n^2-3$

$\Longrightarrow \dfrac{u_n^2-1}{3}=\dfrac{\left(2u_n-u_{n-1}\right)^2}{9}$

</td><td>**1đ**</td></tr>
<tr><td></td><td>

Ta sẽ chứng minh rằng: $\begin{cases} 2u_n-u_{n-1}\,\vdots\,3,\ \forall n\geq 2\\ 2u_{n-1}-u_n\,\vdots\,3,\ \forall n\geq 2\end{cases}$

Thật vậy: với $n=2$ thì $\begin{cases} 2u_2-u_1=4-1=3\,\vdots\,3\\ 2u_1-u_2=0\,\vdots\,3\end{cases}$

Giả sử ta có $\begin{cases} 2u_k-u_{k-1}\,\vdots\,3\\ 2u_{k-1}-u_k\,\vdots\,3\end{cases}$ với $\forall k\geq 2$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
2u_{k+1}-u_k &= 2\left[4\left(u_k\right)-u_{k-1}\right]-u_k\\
&= 8u_k-2u_{k-1}-u_k\\
&= 6u_k+u_k-2u_{k-1}\,\vdots\,3\\
2u_k-u_{k+1} &= 2u_k-\left(4u_k-u_{k-1}\right)\\
&= -2u_k+u_{k-1}\,\vdots\,3.
\end{aligned}$$

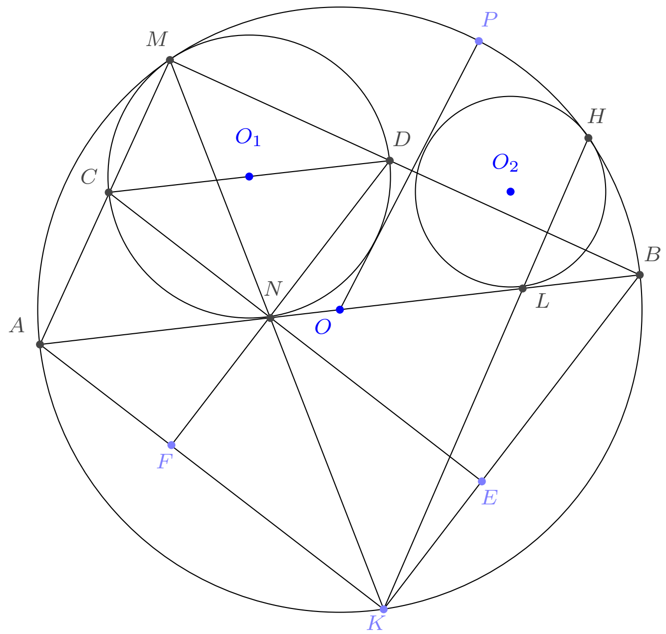
Nói riêng ta có $2u_n-u_{n-1}\,\vdots\,3,\ \forall n\geq 1$

Suy ra $2u_n-u_{n-1}=3k,\ k\in\mathbb{Z}$

Vậy $\dfrac{u_n^2-1}{3}=k^2$ suy ra $\dfrac{u_n^2-1}{3}$ là số chính phương.

</td><td>**1đ**</td></tr>
</table>

Tiếp

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
	 a) Ta có $\widehat{CMD} = \widehat{AMB} = 90^\circ \Longrightarrow CD$ là đường kính của (O_1) $\Longrightarrow \widehat{IDM} = \widehat{IMD} = \widehat{OBM} \Longrightarrow CD \parallel AB$	**1đ**
	Từ đó $CN = DN \Longrightarrow \widehat{AMN} = \widehat{BMN} = 45^\circ$ hay MK là tia phân giác của góc $\widehat{AMB}$. Vậy K là trung điểm của cung AB và K là một điểm cố định. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có HL đi qua K.	**1đ**
3(4đ)	b) Cũng từ kết quả trên ta cũng có: $\widehat{FAN} = \widehat{FNA} = \widehat{EBN} = \widehat{ENB} = 45^\circ$ Suy ra $\widehat{AFN} = \widehat{BEN} = \widehat{ENF} = 90^\circ$ hay tứ giác $NEKF$ là hình chữ nhật. Từ đó chu vi tứ giác $ABEF$ được tính bởi: $p = AB + BE + EF + FA = AB + BE + EK + NK = AB + BK + NK = 2R + R\sqrt{2} + NK$	**1đ**
	Mà $NK \geq OK = R$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $N \equiv O$ hay (O_1) là đường tròn tiếp xúc AB tại $O \Longrightarrow P \equiv B \Longrightarrow$ điều này không thể xảy ra do giả thiết $B \neq P$ Vậy $NK > R$ hay $T > R(3 + \sqrt{2})$	**1đ**
	<u>*Bổ đề:*</u> Với dãy số hữu hạn số nguyên dương (a_k), $k = \overline{1, n+1}$, trong đó mỗi số không lớn hơn $2n$ thì luôn tồn tại hai số trong chúng thỏa mãn số này chia hết cho số kia. Chứng minh: Do $a_i \in \mathbb{N}^* \left(i = \overline{1, n+1}\right)$ nên ta luôn viết được $a_i = 2^{s_i}.r_i$, trong đó $s_i \in \mathbb{N}$ và $r_i \in \left\{2k-1 \mid k = \overline{1, n}\right\}$	**1đ**
	Từ đó vì r_i chỉ nhận n giá trị lẻ nên theo nguyên lý Dirichlet trong $n+1$ số đã cho phải tồn tại hai số a_i, $a_j (i \neq j)$ thỏa mãn $r_i = r_j$. Không mất tính tổng quát giả sử $a_i \geq a_j$, khi đó $a_i \equiv 0 (mod a_j)$	**1đ**
4(4đ)	Xét bài toán đã cho:	

Tiếp

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
	Do dãy số đã cho là một dãy hữu hạn nên tồn tại số nhỏ nhất trong chúng, không mất tổng quát giả sử $a_i = min\{a_k\}$, $k = \overline{1, 2013}$. Khi đó ta chỉ cần chứng minh $a_i > 1342$ là đủ. Thật vậy, giả sử $a_i \leq 1342$, khi đó ta có 2014 số $2a_1$, $3a_1$, $a_2, a_3, \ldots, a_{2013}$ thỏa mãn không có số nào lớn hơn 4026. Theo giả thiết $[a_i, a_j] > 4026$, i, $j = \overline{1, 2013}$, $i \neq j$ nên trong dãy 2014 số ở trên không thể tồn tại 2 số thỏa mãn số này là bội của số kia. Điều này vô lý với bổ đề ở trên. Vậy $a_1 > 1342$	**1đ**
5(4đ)	Giả sử có khả năng sau một số hữu hạn bước nhận được bảng có 6 dấu "-". Cho tại hàng thứ i ta đã đổi dấu x_i lần còn tại cột thứ j ta đã đổi dấu y_j lần. Khi đó tại ô (i, j) ta đã thay đổi $x_i + y_j$ lần. Suy ra tại ô này có dấu "-" khi và chỉ khi $x_i + y_j$ là số lẻ.	**1đ**
	Cho p là số lượng số lẻ giữa các số x_i. Cho q là số lượng số lẻ giữa các số y_j. Khi đó số lượng các dấu "-" trên bảng sẽ là: $$p(10-q) + (10-p)q = 10p + 10q - 2pq$$	**1đ**
	Từ đó ta có đẳng thức $10p + 10q - 2pq = 6 \Longleftrightarrow 5p + 5q - pq = 3 \Longleftrightarrow (p-5)(q-5) = 2.11$ Vì 11 là số nguyên tố nên hoặc $p - 5 \vdots 11$ hoặc $q - 5 \vdots 11$	**1đ**
	Giả sử $p - 5 \vdots 11$ thế nhưng $-5 \leq p - 5 \leq 5$ nên $p - 5 \vdots 11$ thì $p - 5 = 0$ điều này trái với $(p-5)(p-q) = 2.11$. Vậy câu trả lời là không thể.	**1đ**